

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA  
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

B. FRANCHI

EQUAZIONI ELLITTICHE DEGENERI NEL PIANO

12 MAGGIO 1988

1. Premettiamo alcuni richiami. Denotiamo con  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$   $N$  funzioni lipschitziane limitate e nonnegative su  $R^N$ . Se  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ , diremo che il vettore  $u \in R^N$  è sub-unitario (SU) in  $x$  se

$$\forall \xi \in R^N \quad \langle u, \xi \rangle^2 \leq \sum_{j=1}^N \lambda_j^2(x) \xi_j^2$$

Una curva assolutamente continua  $\gamma: [0, T] \rightarrow R^N$  si dirà  $\lambda$ -sub-unitaria se

$\dot{\gamma}(t)$  è sub-unitario in  $\gamma(t)$  q.d. su  $[0, T]$ .

Assegnati ora due punti  $x, y \in R^N$  se esiste una curva sub-unitaria che li congiunge, definiamo la loro distanza nel modo seguente:

$$d(x, y) = \inf\{T > 0; \exists \gamma: [0, T] \rightarrow R^N, \gamma(0) = x,$$

$$\gamma(T) = y, \gamma \text{ } \lambda\text{-sub-unitaria}\}.$$

Diremo che  $d(x, y) = +\infty$  in caso contrario. Se  $d(x, y) < +\infty$ ,  $\forall x, y \in R^N$ , diremo che  $R^N$  è  $\lambda$ -connesso.

Il risultato che intendiamo provare dà una caratterizzazione delle sfere  $B_d(x, \rho)$  nella metrica  $d$  per  $x \in R^N$  e  $\rho > 0$ . Nel seguito, quando non vi sia ambiguità, ometteremo l'indice  $\lambda$  parlando di curve sub-unitarie e scriveremo  $B$  per  $B_d$ .

Introduciamo alcune notazioni. Denoteremo con  $L > 0$  un numero reale positivo tale che

$$|\lambda(x) - \lambda(y)| \leq L|x - y| \quad x, y \in R^N.$$

Siano  $x \in R^N$ ,  $\rho > 0$  fissati. Poniamo

$$C_j(x, \rho) = \{u_j(t), 0 \leq t \leq \rho, u = (u_1, \dots, u_N) \text{ SU}, u(0) = x\} \quad j = 1, \dots, N.$$

E' immediato verificare che

$$(1.1) \quad C_j(x, \rho) \text{ è un intervallo chiuso e limitato contenente } x.$$

Definiamo ora

$$\Lambda_k(x, \rho) = \max_{\substack{s_j \in C_j(x, \rho) \\ j \neq k}} \lambda_k(s_1, \dots, s_{k-1}, x, s_{k+1}, \dots, s_N).$$

Nel seguito, supporremo sempre che

$$(H.1) \quad R^N \text{ è } \lambda\text{-connesso e } d \text{ è continua rispetto alla metrica euclidea.}$$

Una conseguenza immediata di (H.1) è la seguente:

$$(1.2) \quad \forall x \in R^N, \forall \rho > 0 \quad \lambda_k(x, \rho) > 0 \text{ per } k = 1, \dots, N.$$

Supponiamo infatti che esistano  $\bar{x}, \bar{\rho}, k$  tali che  $\lambda_k(\bar{x}, \bar{\rho}) = 0$ .

Sarà allora  $\lambda_k(\bar{x}, \bar{\rho}) \equiv 0$  per  $\rho \in [0, \bar{\rho}]$ . Sia ora  $y \in B(\bar{x}, \bar{\rho})$ ; per definizione esiste  $\gamma: [0, T] \rightarrow R^N$ ,  $\gamma \text{ SU}$ ,  $\gamma(0) = \bar{x}$ ,  $\gamma(T) = y$ ,  $0 < T < \bar{\rho}$ . Dunque, se  $0 < t \leq T$ ,

$$\begin{aligned} |\gamma_k(t) - \bar{x}_k| &\leq \int_0^t \lambda_k(\gamma(s)) ds \leq \int_0^t \lambda_k(\lambda_1(s), \dots, x_k, \dots) ds + \\ &+ L \int_0^t |\gamma_k(s) - \bar{x}_k| ds \leq t \Lambda_k(\bar{x}, t) + L \int_0^t |\gamma_k(s) - \bar{x}_k| ds = \\ &= L \int_0^t |\gamma_k(s) - \bar{x}_k| ds. \end{aligned}$$

Dunque, per la disuguaglianza di Gronwall,  $\gamma_k(t) \equiv \bar{x}_k$ . Ma allora la successione  $\bar{x} + \frac{1}{n} e_k \rightarrow \bar{x}$  per  $n \rightarrow \infty$  rispetto alla metrica euclidea mentre  $d(\bar{x} + \frac{1}{n} e_k, \bar{x}) \geq \rho$ . Ciò prova l'asserto.

Denotiamo con  $Q(x, \rho)$  il parallelepipedo di  $R^N$  definito nel modo seguente:

$$Q(x, \rho) = \prod_{k=1}^N (x_k - \rho \Lambda_k(x, \rho), x_k + \rho \Lambda_k(x, \rho)).$$

E' immediato verificare che esiste una costante  $a > 1$  tale che

$$(1.3) \quad B(x, \rho) \subset Q(x, a\rho) \quad \forall x \in R^N, \forall \rho \in [0, 1].$$

Se infatti  $y \in B(x, \rho)$  esiste una curva su  $\gamma: [0, T] \rightarrow R^N$  tale che  $\gamma(0) = x$ ,  $\gamma(T) = y$ ,  $T < \rho$ . Dunque, se  $0 < t \leq T$ ,

$$\begin{aligned} |\gamma_j(t) - x_j| &\leq \int_0^t \lambda_j(\gamma(s)) ds \leq \int_0^t \lambda_j(\gamma_1(s), \dots, x_j, \dots) ds + \\ &+ L \int_0^t |\gamma_j(s) - x_j| ds \leq t \Lambda_j(x, t) + L \int_0^t |\gamma_j(s) - x_j| ds, \quad \text{per } j=1, \dots, N. \end{aligned}$$

Dunque, per la disuguaglianza di Gronwall,

$$\begin{aligned} |\gamma_j(t) - x_j| &\leq t \Lambda_j(x, t) + L \int_0^t s \Lambda_j(x, s) e^{L(t-s)} ds \leq \\ &\leq (1+L) \int_0^t e^{L(t-s)} ds t \Lambda_j(x, t) \leq a t \Lambda_j(x, t) \leq a t \Lambda_j(x, at), \end{aligned}$$

dove  $a = e^L > 1$ .

In particolare, quindi,

$$|y_j - x_j| = |\gamma_j(T) - x_j| \leq a \rho \Lambda_j(x, a\rho).$$

Proveremo ora che esiste una costante  $b > 0$  tale che

$$(1.4) \quad Q(x, \rho) \subset B(x, b\rho) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \forall \rho \in (0, \rho_0].$$

La dimostrazione è più complessa di quella dell'inclusione inversa. Procediamo quindi a provare alcuni fatti preliminari.

(1.5) *Fissati  $x$  e  $\rho \in (0, \rho_0]$  esiste un riordinamento delle variabili (dipendente da  $x$  e  $\rho$ ) tale che*

$$(i) \quad \Lambda_1(x, \rho) \geq \Lambda_2(x, \rho) \geq \dots \geq \Lambda_N(x, \rho)$$

$$(ii) \quad \Lambda_k(x, \rho) \leq 2\Lambda_k^*(x, \rho) = \max_{\substack{s_j \in C_j(x, \rho) \\ j < k}} \lambda_k(s_1, \dots, s_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots).$$

Dimostrazione. Permutiamo gli indici  $\{1, \dots, N\}$  in modo che (i) sia soddisfatta e rinumeriamo in corrispondenza le variabili. Osserviamo che, fissato  $k \in \{1, \dots, N\}$ , se  $s_j \in C_j(x, \rho)$ ,  $j \neq k$ , si ha:

$$(1.5.1) \quad \lambda_k(s_1, \dots, s_{k-1}, x_k, s_{k+1}, \dots) \leq \lambda_k(s_1, \dots, s_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots) + \\ + L \sum_{\ell=k+1}^N |s_\ell - x_\ell|.$$

D'altra parte, se  $\ell \geq k+1$  è fissato, esiste  $\gamma$  su  $U$ ,  $\gamma(0) = x$ ,  $\gamma_\ell(t_0) = s_\ell$  con  $0 \leq t_0 \leq \rho$ . Ora, se  $0 \leq t \leq t_0$ ,

$$|\gamma_\ell(t) - x_\ell| \leq \int_0^t \lambda_\ell(\gamma(\sigma)) d\sigma \leq \int_0^t \lambda_\ell(\gamma_1(\sigma), \dots, x_\ell, \dots) d\sigma + \\ + L \int_0^t |\gamma_\ell(\sigma) - x_\ell| d\sigma \leq t\Lambda_\ell(x, t) + L \int_0^t |\gamma_\ell(\sigma) - x_\ell| d\sigma.$$

Allora, per la disuguaglianza di Gronwall,

$$|s_\ell - x_\ell| \leq at_0 \Lambda_\ell(x, t_0) \leq ap\Lambda_\ell(x, \rho) \leq (\text{poiché } \ell > k) \quad ap\Lambda_k(x, \rho).$$

Dunque da (1.5.1) segue che

$$\Lambda_k(x, \rho) \leq \Lambda_k^*(x, \rho) + L(N-k)ap\Lambda_k(x, \rho)$$

e quindi la (ii) se  $\rho_0 < 1/2LN a$ .

Siamo ora in grado di provare (1.4). Siano  $x$  e  $\rho$  fissati e rinumeriamo le variabili come in (1.5). Per semplicità, diamo la dimostrazione nel caso  $N = 3$ .

Siano  $\bar{s}_1, \bar{\sigma}_1 \in C_1(x, \rho)$ ,  $\bar{\sigma}_2 \in C_2(x, \rho)$  tali che

$$\lambda_2(\bar{s}_1, x_2, x_3) = \Lambda_2^*(x, \rho), \quad \lambda_3(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, x_3) = \Lambda_3^*(x, \rho). \text{ Inoltre possiamo sempre supporre } \lambda_1 \equiv \Lambda_1 \equiv 1.$$

Osserviamo ora che, per definizione, esiste una curva su  $\gamma$  tale che  $\gamma(0) = x$ ,  $\gamma_1(t_0) = \bar{s}_1$ , con  $0 \leq t_0 \leq \rho$ . Dunque

$$(1.4.1) \quad |\bar{s}_1 - x_1| \leq \int_0^{t_0} |\dot{\gamma}_1(\sigma)| d\sigma \leq t_0 \leq \rho \text{ e, analogamente, } |\bar{\sigma}_1 - x_1| \leq \rho.$$

Inoltre, esiste una curva su opportuna  $\gamma$  tale che  $\gamma(0) = x$ ,  $\gamma_2(t_0) = \bar{\sigma}_2$ , con  $0 \leq t_0 \leq \rho$ . Argomentando come in precedenza si ha allora:

$$|\gamma_2(t) - x_2| \leq at \Lambda_2(x, t),$$

e dunque

$$(1.4.2) \quad |\bar{\sigma}_2 - x_2| \leq a t_0 \Lambda_2(x, t_0) \leq a \rho \Lambda_2(x, \rho) \leq 2a \rho \Lambda_2^*(x, \rho).$$

Sia ora  $y \in Q(x, \rho)$ ; supponiamo  $y_j > x_j$  per  $j = 1, 2, 3$ . Nei casi diversi, la dimostrazione verrà modificata in modo ovvio.

Per provare che  $d(x, y) < b\rho$ , utilizzando una tecnica già sfruttata in casi precedenti ([FL1], [FL2]), costruiremo una poligonale da  $x$  a  $y$  i cui lati sono curve integrali dei campi  $\pm X_j = \pm \lambda_j \partial_j$ , per  $j = 1, 2, 3$ , nel modo seguente:

- (1) da  $(x_1, x_2, x_3)$  a  $(\bar{s}_1, x_2, x_3)$  lungo  $\pm X_1$ ,
- (2) da  $(\bar{s}_1, x_2, x_3)$  a  $(\bar{s}_1, \bar{\sigma}_2, x_3)$  lungo  $\pm X_2$ ,
- (3) da  $(\bar{s}_1, \bar{\sigma}_2, x_3)$  a  $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, x_3)$  lungo  $\pm X_1$ ,
- (4) da  $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, x_3)$  a  $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, y_3)$  lungo  $X_3$ ,
- (5) da  $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, y_3)$  a  $(\bar{s}_1, \bar{\sigma}_2, y_3)$  lungo  $\pm X_1$ ,
- (6) da  $(\bar{s}_1, \bar{\sigma}_2, y_3)$  a  $(\bar{s}_1, y_2, y_3)$  lungo  $\pm X_2$ ,
- (7) da  $(\bar{s}_1, y_2, y_3)$  a  $(y_1, y_2, y_3)$  lungo  $\pm X_1$ .

Si tratta ora di provare che ciascuno dei sette archi precedenti ha lunghezza (richiede cioè un tempo di percorrenza) che può essere controllata da una costante assoluta (che dipende solo da  $N, L$ ) moltiplicata per  $\rho$ . E' ovvio, in nanzitutto, che, per (1.4.1) e (1.4.2), la lunghezza dell'arco (1) è  $\leq \rho$ , mentre le lunghezze degli archi (3), (5) e (7) sono  $\leq 2\rho$ .

Valutiamo ora la lunghezza degli archi (2) e (6); valuteremo cioè la lunghezza di un arco lungo  $\pm X_2$  da  $(\bar{s}_1, \xi_2, \xi_3)$  a  $(\bar{s}_1, \bar{\sigma}_2, \xi_3)$  essendo  $|\xi_2 - x_2| < \rho \Lambda_2(x, \rho)$  e  $|\xi_3 - x_3| < \rho \Lambda_3(x, \rho)$ . Per fissare le idee, supponiamo  $\sigma > \xi_2$ .

Sia  $\phi$  la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \lambda_2(\bar{s}_1, \phi, \xi_3) \\ \phi(0) = \xi_2. \end{cases}$$

E' evidente che la curva  $t \mapsto (\bar{s}_1, \phi(t), \xi_2)$  è SU. Osserviamo poi che  $\lambda_2(\bar{s}_1, \xi_2, \xi_3) > 0$ . Infatti

$$\begin{aligned} (1.4.3) \quad \lambda_2(\bar{s}_1, \xi_2, \xi_3) &\geq \lambda_2(\bar{s}_1, x_1, x_3) - L|\xi_2 - x_2| - L|\xi_3 - x_3| \geq \\ &\geq \Lambda_2^*(x, \rho) - \rho L \Lambda_2(x, \rho) - \rho L \Lambda_3(x, \rho) \geq (\text{per (1.5) (i) e (ii)}) \\ &\frac{1}{2} \Lambda_2(x, \rho) - 2L\rho \Lambda_2(x, \rho) \geq \frac{1}{4} \Lambda_2(x, \rho) \end{aligned}$$

se  $\rho_0 < 1/8L$ .

Dunque, tenendo conto del fatto che  $\dot{\phi} \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \phi(t) - \xi_2 &= \int_0^t \lambda_2(\bar{s}_1, \phi(s), \xi_3) ds \geq \int_0^t \lambda_2(\bar{s}_1, \xi_2, \xi_3) ds - \\ &- Lt(\phi(t) - \xi_2) \geq (\text{per (1.4.3)}) \frac{t}{4} \Lambda_2(x, \rho) - Lt(\phi(t) - \xi_2) \end{aligned}$$

Allora, se  $t \leq 1$ ,

$$\phi(t) - \xi_2 \geq \frac{t}{4(1+L)} \Lambda_2(x, \rho)$$

e quindi  $\phi([0, 1]) \supset [\xi_2, \xi_2 + \frac{\Lambda_2(x, \rho)}{4(1+L)}]$ .

Poichè  $0 \leq \bar{\sigma}_2 - \xi_2 \leq |\bar{\sigma}_2 - x_2| + |\xi_2 - x_2| \leq (a+1)\rho \Lambda_2(x, \rho)$ , purchè  $\rho_0 < 1/4(1+L)(a+1)$ , sarà



$\phi_2 \in \rho([0,1])$  e quindi  $\bar{\sigma}_2 = \phi(t_0)$  per un dato  $t_0 \in [0,1]$ . D'altra parte

$$(a+1)\rho\Lambda_2(x,\rho) \geq \bar{\sigma}_2 - \varepsilon_2 = \phi(t_0) - \varepsilon_2 \geq \frac{t_0}{4(1+L)} \Lambda_2(x,\rho),$$

e quindi  $t_0 \leq 4(1+L)(a+1)\rho$ . Ciò ci permette di stimare la lunghezza degli archi (2) e (6).

Più semplice è stimare la lunghezza dell'arco (4). Consideriamo la soluzione  $\phi$  del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \lambda_3(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \phi) \\ \phi(0) = x_3 \end{cases}$$

È evidente che la curva  $t \mapsto (\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \phi(t))$  è SU. Per (1.5) e (1.2),  $\lambda_3(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, x_3) > 0$ . Argomentando poi come sopra, se  $t \leq 1$  risulta

$$\phi(t) - x_3 \geq \frac{t}{1+L} \Lambda_3(x,\rho).$$

Ciò assicura che  $\phi([0,1]) \supset [x_3, x_3 + \frac{\Lambda_3(x,\rho)}{1+L}]$ . D'altra  $0 < y_3 - x_3 < \rho \Lambda_3(x,\rho) < \frac{\Lambda_3(x,\rho)}{1+L}$  se  $\rho_0 < \frac{1}{1+L}$ , e quindi esiste  $t_0 \in [0,1]$  tale  $y_3 = \phi(t_0)$ . Sarà allora

$$\rho \Lambda_3(x,\rho) \geq y_3 - x_3 \geq \frac{t_0}{1+L} \Lambda_3(x,\rho)$$

e quindi  $t_0 \leq \rho(1+L)$ . Ciò permette di stimare la lunghezza dell'arco (4) e quindi di provare l'asserto (1.4) con  $b = (1+L)(\delta(a+1)+1)+7$ .

Dunque

$$(1.6) \quad Q(x,\rho/b) \subset B(x,\rho) \subset Q(x,a\rho) \quad \forall x,\rho, \rho \text{ sufficientemente vicino a zero.}$$

Vedremo nel seguito che un importante ruolo per la regolarità di operatori differenziali associati ai campi  $X_1, \dots, X_n$  è sostenuto dalla (eventuale) proprietà di duplicazione (PD) della metrica  $d$ . Più precisamente:

Diremo che la metrica  $d$  è PD e che lo spazio  $(\mathbb{R}^N, d, dx)$  (essendo  $dx$  la misura di Lebesgue) è di tipo omogeneo se esiste  $A > 1$  tale che

$$(1.7) \quad |B(x, 2\rho)| \leq A |B(x, \rho)| \quad \forall x, \rho.$$

Dalla (1.6) segue che (1.7) è equivalente a

$$(1.8) \quad |Q(x, 2\rho)| \leq B |Q(x, \rho)| \quad \forall x, \rho \text{ per } B > 1 \text{ fissato.}$$

Osserviamo infine che (1.8) è equivalente a

$$(1.9) \quad \Lambda_k(x, 2\rho) \leq B_k \Lambda_k(x, \rho) \quad \forall x, \rho$$

e per  $B_k > 1$  opportuno per  $k = 1, \dots, N$ .

Infatti chiaramente (1.9) implica (1.8). D'altra parte

$$\begin{aligned} 2\Lambda_k(x, 2\rho) &= \frac{|Q(x, 2\rho)|}{2^{N-1} \prod_{j \neq k} \Lambda_j(x, 2\rho)} \leq \\ &\leq 2^{1-N} B \frac{|Q(x, \rho)|}{\prod_{j \neq k} \Lambda_j(x, \rho)} \leq 2^{1-N} B \frac{|Q(x, \rho)|}{\prod_{j \neq k} \Lambda_j(x, \rho)} = 2^{1-N} B \Lambda_k(x, \rho). \end{aligned}$$

Ricordiamo che: se  $\phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  è una funzione crescente tale che  $\phi(2t) \leq C\phi(t)$ , allora

$$(1.10) \quad \text{se } \theta \in (0,1), \phi(\theta t) \geq \frac{1}{C} \theta^\alpha \phi(t), \alpha = \log_2 C.$$

Incidentalmente, per sottolineare l'importanza di (1.7) in questioni di regolarità, notiamo che, se (1.7) è verificata, per (1.9) e (1.10)

$$B_d(x, \rho) \supset B_{\text{euclidea}}(x, C\rho^\epsilon),$$

per opportune costanti  $C$  ed  $\epsilon$ . Allora se  $\lambda_j \in C^\infty$  per  $j = 1, \dots, N$  l'operatore  $L = \sum_j X_j^2$  è sub-ellittico, per un risultato di [F/P] (se  $N = 2$  l'affermazione è ancora vera se  $\lambda_j \in C^1$ , per [X]). D'altra parte, un esempio di Morimoto esibisce un operatore in  $R^2$  con  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ ,  $\lambda_3 = \lambda_3(x_1) \in C^\infty$  per il quale la metrica  $d$  è continua, (1.7) non è verificata e  $\partial_1^2 + \partial_2^2 + \lambda_3^2 \partial_3^2$  non è ipoellittico.

2. In  $R^2$  consideriamo un operatore del secondo ordine in forma di divergenza

$$L = \sum_{i,j} \partial_i (a_{ij} \partial_j)$$

dove  $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty$  per  $i, j = 1, 2$ .

Supporremo che

(2.1) *esiste  $\nu < 1$  tale che*

$$\nu \omega(x) (\xi_1^2 + \lambda \xi_2^2) \leq \sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \frac{1}{\nu} \omega(x) (\xi_1^2 + \lambda \xi_2^2) \quad \forall x, \xi,$$

dove

(2.2)  $\lambda$  è una funzione non negativa lipschitziana e limitata;

(2.3) la distanza  $d$  associata ai campi  $a_1$  e  $\lambda a_2$  è hölderiana rispetto alla metrica euclidea e  $(\mathbb{R}^2, d, dx)$    uno spazio di tipo omogeneo;

(2.4) esiste  $M \in (0, 1]$  tale che  $\forall t \in (0, t_0], \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{1}{t} \int_{-t}^t \lambda(x_1 + s, x_2) ds \geq M \max_{|s| \leq t} \lambda(x_1 + s, x_2) = \Lambda(x, t).$$

(2.5)  $w$    un peso  $A_2$  rispetto alla distanza  $d$ , cio 

$$\int_{B(x, \rho)} w(x) dx \left( \int_{B(x, \rho)} w^{-1}(x) dx \right)^{-1} \leq c_{w, 2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \rho \in (0, \rho_0].$$

Sotto le ipotesi precedenti, esiste una classe di spazi naturali associati all'operatore  $L$ : ad esempio, se  $1 < p < \infty$  e  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , denoteremo  $H_{\lambda, w}^1(\Omega)$  l'insieme delle funzioni  $u$  tali che

$$\int_{\Omega} (|a_1 u|^p + |\lambda a_2 u|^p) w(x) dx + \int_{\Omega} |u|^p w(x) dx < +\infty.$$

In modo standard si definiscono allora gli spazi locali, le soluzioni, le sopra(sotto)soluzioni... (si veda, ad es., [F/S]).

Siamo ora in grado di provare il risultato seguente:

Teorema I. Siano soddisfatte (3.1)-(3.5). Allora

- (i) se  $u \in H_{\lambda, \omega}^{1, \text{loc}}(\Omega)$  è una soluzione debole nonnegativa di  $Lu=0$ , allora  $u$  soddisfa una disuguaglianza di Harnack invariante, esiste cioè  $C>0$  indipendente da  $u$  tale che  $\forall x \in \Omega, \forall \rho < \rho_0(x)$

$$\sup_{B(x, \rho)} u \leq C \inf_{B(x, \rho)} u$$

- (ii) se  $u \in H_{\lambda, \Omega}^{1, \text{loc}}$  è soluzione debole di  $Lu = 0$ , allora  $u$  è hölderiana (Teor. di De Giorgi-Nash-Moser).

Prima di dare un'idea della dimostrazione (che ripercorre le linee di [F/S]), premettiamo alcune considerazioni sulle ipotesi. Risultati analoghi al teorema I sono noti nei casi seguenti:

- (i)  $\inf \lambda > 0$  ([F/K/S] e caso ellittico se  $\omega \equiv 1$ );
- (ii)  $\lambda = \lambda(|x_1|)$ ,  $0 \leq t \lambda'(t) \leq \alpha \lambda(t)$  per  $t \neq 0$  ([F/S] e [F/L2] se  $\omega \equiv 1$ );
- (iii)  $\omega \equiv 1$ ,  $\lambda = |\mu|$ ,  $\mu \in C^\infty$ ,  $\partial_1^m \mu \neq 0$  per un  $m \in \mathbb{N}$  opportuno in un intorno di un punto dato  $x_0$  (condizione di Hörmander), per [N/S/W] e altri.

Osserviamo allora che nei casi (ii) e (iii) (il caso (i) è ovvio) le ipotesi (2.1)-(2.4) sono soddisfatte. Per quanto riguarda il caso (ii), è provato in [F/L1] che 2.3 è soddisfatta.

D'altra parte, sempre per i risultati di [F/L1] se, ad esempio  $x_1 \geq 0$  si ha:

$$\frac{1}{t} \int_{-t}^t \lambda(x_1+s) ds \geq \frac{1}{t} \int_{t/2}^t \lambda(x_1+s) ds \geq \frac{1}{2} \lambda(x_1 + \frac{t}{2}) \geq c_\alpha \lambda(x_1+t) = c_\alpha \max_{|s| \leq t} \lambda(x_1+s).$$

Per quanto riguarda il caso (iii), la proprietà (2.3) è provata in [N/S/W]. Proviamo che anche (3.4) è verificata. Iniziamo con l'osservare che

(2.6) Se  $p$  è un polinomio reale di grado  $\leq n$ , esiste una costante  $c_n > 0$  dipendente solo da  $n$  tale che

$$\frac{1}{t} \int_{-t}^t |p(s)| ds \geq c_n \max_{|s| \leq t} |p(s)|, \quad t > 0.$$

Basta infatti osservare che, denotato con  $p_t$  il polinomio  $p_t(s) = p(ts)$ , l'affermazione precedente è equivalente a

$$(2.6') \quad \int_{-1}^1 |p_t(s)| ds \geq c_n \max_{|s| \leq 1} |p_t(s)|.$$

D'altra parte, entrambe le espressioni in (3.6') sono norme sullo spazio dei polinomi di grado  $\leq n$  che ha dimensione finita e l'affermazione segue. Analogamente si può provare che, se  $p(s) = \sum_{k=0}^n a_k s^k$ , esiste  $c'_n > 0$  dipendente solo da  $n$  tale che

$$(2.7) \quad \frac{1}{t} \int_{-t}^t |p(s)| ds \geq c'_n \sum_{k=0}^n |a_k| |t|^k.$$

Se dunque (iii) è verificata, posto  $x_0 = 0$  per  $x \in K$  si ha:

$$\mu(x_1 + s, x_2) = \sum_{k=0}^m \partial_1 \mu(x) \frac{s^k}{k!} + \Omega(x, s) s^{m+1} = p(x, s) + \Omega s^{m+1},$$

dove  $\Omega$  è limitata in  $K$ . Allora, poichè  $|\partial_1 \mu| \geq \mu_0 > 0$  in  $K$ ,

$$\max_{|s| \leq t} |\mu(x_1+s, x_2)| \leq \max_{|s| \leq t} |p(x, s)| + Ct^{n+1} \leq \quad (\text{per (2.6)})$$

$$\leq \frac{1}{t} \int_{-t}^t |p(x, s)| ds + Ct^{m+1} \leq \frac{1}{t} \int_{-t}^t |\mu(x_1+s, x_2)| ds + C't^{m+1}.$$

D'altra parte, per (2.7),

$$\frac{1}{t} \int_{-t}^t |p(x, s)| ds \geq c'_m t^m |\partial_1^m \mu(x)| \geq c'_m \mu_0 t^m$$

e quindi l'asserzione segue.

E' facile vedere però che la classe di operatori considerata nel Teorema I è più ampia e contiene situazioni non  $C^\infty$  essenzialmente diverse da quelle considerate in [F/L2] e [F/S].

Consideriamo ad esempio la funzione  $\phi = \phi(|x_1|)$  costruita nel modo seguente: sia  $\alpha > 0$ ; poniamo  $\phi(\frac{1}{n^\alpha}) = 0$ ,  $\phi(\frac{1}{2n^\alpha} + \frac{1}{2(n+1)^\alpha}) = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}$  e raccordiamo linearmente  $\phi$  tra questi punti. La funzione  $\phi$  è lipschitziana, nonnegativa e limitata.

$$\max_{[0, t]} \phi = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \text{ per } \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{(n+1)^\alpha} \right) \leq t \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(n-1)^\alpha} + \frac{1}{n^\alpha} \right).$$

Dunque  $\Lambda(0, t) = \Lambda(t) \sim t^{1+1/\alpha}$ . D'altra parte, se

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq t \leq \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{t} \int_0^t \phi(s) ds \geq \frac{1}{2t} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left( \frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right)^2 \geq$$

$$\geq c_1 \frac{1}{t} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2\alpha+2}} \geq c_2 \frac{1}{t} \frac{1}{n^{2\alpha+1}} \geq c_3 t^{\frac{2\alpha+1}{\alpha}-1} = c_3 t^{1+\frac{1}{\alpha}} \geq c_4 \Lambda(t).$$

Osserviamo ancora che, per la (PD) della funzione  $t \rightarrow \Lambda(x, t)$ , la (2.4) è equivalente a

$$(2.4') \quad \frac{1}{t} \int_0^t \lambda(x_1 + s, x_2) ds \geq M' \max_{0 \leq s \leq t} \lambda(x_1 + s, x_2).$$

Dimostrazione del Teorema I. L'idea fondamentale è quella di costruire una famiglia di curve uscenti dal centro di una sfera e che copra una parte significativa della sfera stessa. Successivamente, integrando lungo queste curve, si ottiene una formula di rappresentazione di una funzione  $u$  analoga a quella di  $u$  tramite un integrale frazionario del suo gradiente nel caso euclideo.

Sia  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ,  $0 < \varepsilon_i < 1$ ,  $i = 1, 2$ . Poniamo  $\Delta_\varepsilon = [\varepsilon_1, 1] \times [\varepsilon_2, 1]$ . Nel seguito, per semplicità scriveremo  $t\Lambda(x, t) = F(x, t)$ . Se  $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ , denotiamo con  $H(t, x, \xi) = (H_1(\dots), H_2(\dots))$  la soluzione al tempo  $t$  del problema di Cauchy

$$\dot{H} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \lambda(H)\xi_2 \end{pmatrix} \quad H(0, x, \xi) = x.$$

Proviamo che

$$(2.8) \quad \text{Fissato } \theta \in (0, 1) \text{ esistono } \varepsilon = \varepsilon_\theta, c_\theta \in (0, 1) \text{ tali che}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \forall \rho \in (0, \rho_0]$$



- (i)  $H(r, x, \cdot): \Delta_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}^2$  è iniettiva;  
(ii)  $H(r, x, \Delta_\epsilon) \supset [x_1 + \theta_r, x_1 + r] \times [x_2 + \theta F(x, c_\theta r), x_2 + F(x, c_\theta r)]$ .

Sia infatti  $y_1 \in [x_1 + \theta_r, x_1 + r]$ . Si ha:

$$H_1(r, x, \xi) = y_1 \quad x_1 + r\xi_1 = y_1 \quad \xi_1 = \frac{y_1 - x_1}{r} \in [0, 1].$$

Basta dunque scegliere  $\epsilon_{\theta, 1} = \theta$ .

Fissato ora  $\xi_1$  in dipendenza da  $y_1$ , se  $t \in (0, r]$  si ha: ( $\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0$ )

$$\begin{aligned} H_2(t, x, \xi) &= x_2 + \xi_2 \int_0^t \lambda(x_1 + s\xi_1, H_2) ds \geq \\ &\geq x_2 + \xi_2 \int_0^t \lambda(x_1 + s\xi_1, x_2) ds - L\xi_2 \int_0^t (H_2(s, x, \xi) - x_2) ds \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$H_2(t, x, \xi) \leq x_2 + \xi_2 \int_0^t \lambda(x_1 + s\xi_1, x_2) ds + L\xi_2 \int_0^t (H_2(s, x, \xi) - x_2) ds.$$

Ora, se  $\xi_2 \leq 1$  e  $r < 1/2L$  questo implica che

$$(2.9) \quad 2\xi_2 \int_0^t \lambda(x_1 + s\xi_1, x_2) ds \geq H_2(t, x, \xi) - x_2 \geq \frac{2}{3} \int_0^t \lambda(x_1 + s\xi_1, x_2) ds.$$

D'altra parte, ponendo  $s\xi_1 = \sigma$ , si ha

$$\int_0^t \lambda(x_1 + s\xi_1, x_2) ds = \frac{1}{\xi_1} \int_0^{t\xi_1} \lambda(x_1 + \sigma, x_2) d\sigma \geq$$

(poichè  $t\xi_1 \leq t < r < r_0$  in (2.4'))  $M't\lambda(x, t\xi_1) \geq M'F(x, \theta t)$ .

Analogamente

$$\int_0^t \lambda(x_1 + s\varepsilon_1, x_2) ds \leq t\Lambda(x, t\varepsilon_1) \leq F(x, t).$$

Dunque, se  $t \in (0, r]$ ,

$$(2.10) \quad 2\varepsilon_2 F(x, t) \geq H_2(t, x, \varepsilon) - x_2 \geq \frac{2M'}{3} \varepsilon_2 F(x, \theta t) \geq F(x, c_1 \theta t) \varepsilon_2$$

(per (PD)).

Una prima conseguenza è allora che

$$[x_2, x_2 + F(x, c_1 \theta r)] \subset H(r, x, \varepsilon_1, [0, 1]).$$

Scegliamo allora  $c_\theta = c_1 \theta$ . Per quanto provato precedentemente,

se  $y_2 \in [x_2 + \theta F(x, c_\theta r), x_2 + F(x, c_\theta r)]$ , esisterà  $\varepsilon_2 \in [0, 1]$  tale che ( $\varepsilon_1$  è fissato)

$y_2 = H(r, x, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ . Dunque, per (2.10),

$$2\varepsilon_2 F(x, r) \geq y_2 - x_2 \geq \theta F(x, c_\theta r)$$

e quindi

$$\varepsilon_2 \geq \frac{\theta}{2} \frac{F(x, c_\theta r)}{F(x, r)} \geq \varepsilon_{\theta, 2} > 0,$$

ancora per (PD). La (2.8)-(ii) è così provata.

Supponiamo ora per un momento da  $\lambda$  sia  $C^1$ .

Allora  $\frac{\partial H_1}{\partial \varepsilon_1} = t$ ,  $\frac{\partial H_2}{\partial \varepsilon_2} = 0$ ,  $\frac{\partial H_2}{\partial \varepsilon_2}$  è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial H_2}{\partial \xi_2} = (\partial_2 \lambda)(H) \frac{\partial H_2}{\partial \xi_2} \xi_2 + \lambda(H) \\ \frac{\partial H_2}{\partial \xi_2}(0) = 0 \end{cases}$$

e quindi, se  $t \leq r_0$  e  $0 \leq \xi_2 \leq 1$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_2}{\partial \xi_2}(t, x, \xi) &= \int_0^t \lambda(H) e^{\xi_2 \int_s^t (\partial_2 \lambda)(H) d\sigma} ds \geq \\ &\geq e^{-r_0 \sup |\partial_2 \lambda|} \int_0^t \lambda(H) ds. \end{aligned}$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned} \int_0^t \lambda(H) ds &\geq \int_0^t \lambda(x_1 + s\xi_1, x_2) ds - L \int_0^t (H_2(s, x, \xi) - x_2) ds \geq \\ &\geq \int_0^t \lambda(x_1 + s\xi_1, x_2) ds - Lt \int_0^t \lambda(x_1 + s\xi_1, H_2) ds \end{aligned}$$

e quindi, se  $t \leq 1$

$$(2.11.a) \quad \frac{\partial H_2}{\partial \xi_2}(t, x, \xi) \geq \frac{e^{-r_0 \sup |\partial_2 \lambda|}}{1+L} \int_0^t \lambda(x_1 + s\xi_1, x_2) ds.$$

Analogamente, se  $r_0 < 1/2L$

$$(2.11.b) \quad \frac{\partial H_2}{\partial \xi_2}(t, x, \xi) \leq 2 e^{r_0 \sup |\partial_2 \lambda|} \int_0^t \lambda(x_1 + s\xi_1, x_2) ds.$$

Infine, se  $0 < t \leq r < r_0 < 1/2L$ ,

$$(2.11.c) \quad \left| \frac{\partial H_2}{\partial \xi_1}(t, x, \xi) \right| \leq C e^{r_0 \sup |\partial_2 \lambda|}$$

Osserviamo che le costanti (2.11.a), (2.11.b), (2.11.c) e  $r_0$  dipendono solo da  $L$ ; dunque un usuale procedimento di regolarizzazione permette di concludere che

$\xi \rightarrow H(t, x, \xi)$  è lipschitziana e, se  $r_0 < 1/2L$ ,

$$2e^{\frac{1}{2}} \int_0^t \lambda(x_1 + s\xi_1, x_2) ds \geq \left| \det \frac{\partial H}{\partial \xi}(t, x, \xi) \right| \geq \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{1+L} t \int_0^t \lambda(x_1 + s\xi_1, x_2) ds.$$

Osserviamo infine che da (3.11.a) con analogo argomento segue che

$$|H_2(t, x, \xi_1, \xi_2') - H_2(t, x, \xi_1, \xi_2'')| \geq \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{1+L} \int_0^t \lambda(x_1 + s\xi_1, x_2) ds \cdot |\xi_2' - \xi_2''|,$$

e dunque (i) di (2.8) poichè  $\lambda$  non può annullarsi identicamente su un intervallo.

Sia ora

$$S_+^\theta(x, r) = [x_1 + \theta r, x_1 + r] \times [x_2 + F(x, c_\theta r), x_2 + F(x, c_\theta r)],$$

$$Q^\theta(x, r) = [x_1 - r, x_1 + r] \times [x_2 - F(x, c_\theta r), x_2 + F(x, c_\theta r)],$$

$$Q^{+\theta}(x, r) = Q^\theta(x, r) \cap \{y_j \geq x_j, j = 1, 2\}.$$

Nel seguito, quando non vi sia ambiguità, ometteremo di scrivere  $(x, r)$ .

Supponiamo  $u \in C^1$  e sia (per un  $\beta \in (0, 1)$ )

$$(2.12) \quad |E| = |\{y \in Q^\theta; u(y) = 0\}| \geq \beta |Q^\theta(x, r)|,$$

dove  $\theta = \theta(\beta) = 1 - \sqrt{1-\beta/2}$ .

Possiamo sempre supporre  $|E_+| = |E \cap Q_+^\theta| \geq \frac{\beta}{4} |Q^\theta|$ . Risulta

$$(2.13) \quad |E_+ \cap S_+^\theta| \geq \frac{\beta}{8} |Q^\theta|.$$

Infatti

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} |Q^\theta| &= |Q_+^\theta| \geq |Q_+^\theta \cap (E \cup S_+^\theta)| = |(Q_+^\theta \cap E) \cup S_+^\theta| = \\ &= |Q_+^\theta \cap E| + |S_+^\theta| - |E \cap S_+^\theta| = |E_+| + |S_+^\theta| - |E \cap S_+^\theta| \geq \\ &\geq \frac{\beta}{4} |Q^\theta| + \frac{(1-\theta)^2}{4} |Q^\theta| - |E_+ \cap S_+^\theta| = \frac{1}{4} (1 + \frac{\beta}{2}) |Q^\theta| - |E_+ \cap S_+^\theta|, \text{ e quindi (2.13).} \end{aligned}$$

Sia ora  $\Sigma = \{\xi \in \Delta_\epsilon; H(r, x, \xi) \in E_+\}$ . Vogliamo stimare  $|\Sigma|$ . Ponendo  $H(r, x, \xi) = y$ , si ha:

$$\begin{aligned} |\Sigma| &= \int_\Sigma d\xi = \int_{E_+} \left| \det \frac{\partial H}{\partial \xi}(r, x, \xi) \right|^{-1} dy \geq \\ &\geq \frac{\epsilon}{2}^{-\frac{1}{2}} |E_+| (r \int_0^r \lambda(x_1 + s\xi_1, x_2) ds)^{-1} \geq 2e^{-\frac{1}{2}} \frac{|E_+|}{|Q(x, r)|} \geq c_1(\beta), \text{ poich  } \theta = \theta(\beta). \end{aligned}$$

Sia ora  $K$  una funzione  $C^\infty$  a supporto in  $[\epsilon_1/2, 3/2] \times [\epsilon_2/2, 3/2]$ , dove  $\epsilon = \epsilon(\theta(\beta))$  e identicamente uno in  $\Delta_\epsilon$ . Si ha

$$|u(x)| = |u(x) - u(H(r, x, \xi))| K(\xi) \quad \xi \in \Sigma.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
|\Sigma| |u(x)| &= \int_{\Sigma} |u(x) - u(H(t, x, \xi))| K(\xi) d\xi \leq \\
&\leq \int_0^r dt \int_{\text{supp} K} d\xi |\langle \nabla u(H(t, x, \xi)), \dot{H}(t, x, \xi) \rangle| K(y) dy \leq \\
&\leq \int_0^r dt \int_{\text{supp} K} d\xi |\nabla_{\lambda} u(H(t, x, \xi))| \leq (H(t, x, \xi) = y) \\
&\leq \frac{C_L}{M^i} \int_0^r dt \frac{1}{|Q(x, t)|} \int_{H(t, x, \text{supp} K)} dy |\nabla_{\lambda} u(y)|.
\end{aligned}$$

D'altra parte,  $t \mapsto H(t, x, \xi)$  è una curva su  $\forall \xi \in \text{supp} K$ , ed essendo  $\text{supp} K$  limitato, esiste  $c_2 > 0$  tale che  $H(t, x, \text{supp} K) \subset B(x, c_2 t)$ . Dunque, tenendo conto anche della stima di  $|\Sigma|$ , possiamo concludere che, se  $Q \in (0, 1)$ ,

$$\begin{aligned}
|u(x)| &\leq c_3(\beta) \int_0^r dt |B(x, t)|^{Q-1} \sup_{\tau > 0} |B(x, \tau)|^{-Q} \cdot \\
&\cdot \int_{B(x, \tau)} |\nabla_{\lambda} u(y)| \chi_{B(x, c_2 r)}(y) dy
\end{aligned}$$

= (scrivendo per brevità  $\chi_{B(x, c_2 r)} = \chi_{c_2 B}$  e designando con  $M_Q$  la funzione massimale frazionaria di esponente  $Q$ )

$$\begin{aligned}
&c_3(\beta) \int_0^r dt |B(x, t)|^{Q-1} \cdot M_Q(|\nabla_{\lambda} u|_{\chi_{c_2 B}})(x) = \\
&= c_3(\beta) r \int_0^1 dt |B(x, \tau r)|^{Q-1} M_Q(|\nabla_{\lambda} u|_{\chi_{c_2 B}})(x) \geq \\
&\leq c_3(\beta) r |B(x, r)|^{Q-1} \cdot M_Q(|\nabla_{\lambda} u|_{\chi_{c_2 B}})(x) \frac{1}{A} \int_0^1 d\tau \tau^{\alpha(Q-1)},
\end{aligned}$$

dove  $A$  è la costante di (PD) per la misura delle sfere e  $\alpha = \log_2 A$ . Scelto allora  $Q$  tale che  $\alpha(Q-1) > -1$ , si ha:

$$(2.14) \quad |u(x)| \leq c_4(\beta)r|B(x,r)|^{Q-1} M_Q(|\nabla_\lambda u|_{X_{c_2 B}})(x).$$

Usuali procedimenti di regolarizzazione permettono poi di estendere (2.14) a funzioni  $u$  lipschitziane.

Sia ora  $\bar{x}$  fissato e sia  $u$  lipschitziana su

$Q^{\theta(\beta)}(\bar{x}, r) = \bar{Q}$  tale che  $|\{y \in \bar{Q}; u(y) = 0\}| \geq \beta|\bar{Q}|$ . Se  $x \in \bar{Q}$  esistono costanti assolute  $c_5$  e  $c_6$  tali che

$$Q^{\theta(\beta)}(x, c_5 r) \supset \bar{Q} \quad \text{e} \quad Q^{\theta(\beta)}(x, c_5 r) \subset Q(\bar{x}, c_6 r).$$

Si ha:

$$\begin{aligned} |\{y \in Q^{\theta(\beta)}(x, c_5 r); u(y) = 0\}| &\geq |\{y \in \bar{Q}; u(y) = 0\}| \\ &\geq \beta|\bar{Q}| \geq \beta_1 |Q^{\theta(\beta)}(x, c_5 r)|, \end{aligned}$$

dove  $\beta_1 = c_7 \beta$ ,  $c_7$  essendo una costante assoluta.

Dunque da (2.14),  $\forall x \in \bar{Q}$  si ha:

$$(2.15) \quad |u(x)| \leq c_8(\beta)r|\bar{Q}|^{Q-1} M_Q(|\nabla_\lambda u|_{X_{B(\bar{x}, c_9 r)}})(x).$$

Tenendo allora conto del fatto che, essendo  $\omega \in A_2$

$$\omega(\bar{Q}) = \int_{\bar{Q}} \omega(x) dx \geq c_{10}(\beta)\omega(B(\bar{x}, c_9 r)),$$

si ha che, se  $p \geq 2$  e  $k > 1$

$$\left( \int_{\bar{Q}} |u(x)|^{kp_{\omega}(x)} dx \right)^{1/kp} \leq c_{11}(\beta) r |\bar{Q}|^{Q-1}.$$

$$\cdot \left( \int_{B(\bar{x}, c_9 r)} |M_Q(|\nabla_{\lambda} u|_{x_{B(\bar{x}, c_9 r)}(x)})|^{kp_{\omega}(x)} dx \right)^{1/kp}.$$

D'altra parte, un teorema di continuità per la funzione massimale frazionaria in spazi di tipo omogeneo, in questo caso  $(\mathbb{R}^2, d, w(x)dx)$  ([F/S], Lemma 4.4) permette di maggiore l'ultimo integrale scritto con

$$c_{12}(\beta) r \left( \int_{B(\bar{x}, c_9 r)} |\nabla_{\lambda} u|^p \right)^{1/p} \text{ se } k < (1 - (1-Q)p/2)^{-1}.$$

Si ha dunque

$$(2.16) \quad \left( \int_{\bar{Q}} |u(x)|^{kp_{\omega}(x)} dx \right)^{1/kp} \leq c_{12}(\beta) r \left( \int_{B(\bar{x}, c_9 r)} |\nabla_{\lambda} u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Scegliamo ora  $\beta = 1/2$  e poniamo  $\theta_0 = \theta(\frac{1}{2})$ . Se  $c_{\theta_0}$  è la costante di (2.8) e  $a$  è la costante di (1.3), se  $r < r_0 / \min\{a, 2a/c_{\theta_0}\}$ , si ha:

$$B(\bar{x}, r) \subset Q(\bar{x}, ar) \subset Q^{\theta_0}(\bar{x}, \max\{a, 2a/c_{\theta_0}\}r), \text{ in quanto}$$

$$F(\bar{x}, ar) \leq F(\bar{x}, \max\{a, 2a/c_{\theta_0}\}c_{\theta_0}r) = F(\bar{x}, ar).$$

Come in [F/S] si determina allora  $\mu \in \mathbb{R}$  tale che

$$|\{y \in Q^{\theta_0}(\bar{x}, ar); u \geq \mu\}| \geq \frac{1}{2} |Q^{\theta_0}(\bar{x}, ar)|$$

e



$$|\{y \in Q^0(\bar{x}, \alpha r); u \leq \mu\}| \geq \frac{1}{2} |Q^0(\bar{x}, \alpha r)|.$$

Quindi, applicando (2.16) a  $(u-\mu)^+$  e  $(u-\mu)^-$  si ha:

$$\left( \int_{Q^0(\bar{x}, \alpha r)} |u-\mu|^{kp} \omega(x) dx \right)^{1/kp} \leq c_{12} \left( \frac{1}{2} \right)^r \left( \int_{Q(\bar{x}, c_9 r)} |u|^{p\omega(x)} dx \right)^{1/p}.$$

D'altra parte (b è definito in (1.4)):

$$|Q^0(\bar{x}, \alpha r)| \leq |Q(\bar{x}, \alpha r)| \leq |B(\bar{x}, \alpha br)| \leq c_{13} |B(\bar{x}, r)|,$$

con  $c_{13}$  costante assoluta, e quindi

$$(2.17) \quad \left( \int_{B(\bar{x}, r)} |u-\mu|^{kp} \omega(x) dx \right)^{1/kp} \leq c_{14} r \left( \int_{B(\bar{x}, c_{15} r)} |\nabla_\lambda u|^{p\omega(x)} dx \right)^{1/p},$$

dove  $\mu = \mu(u, \theta_0, \alpha, \bar{x})$ , e  $c_{14}$ ,  $c_{15}$  sono costanti assolute.

In modo usuale allora da (2.17) si ricava la disuguaglianza di Sobolev-Poincaré:

$$(2.18) \quad \left( \int_{B(x, r)} |u-u_B|^{kp} \omega(x) dx \right)^{1/kp} \leq c_{16} r \left( \int_{B(\bar{x}, c_{15} r)} |\nabla_\lambda u|^{p\omega(x)} dx \right)^{1/p},$$

dove  $c_{16}$  è una costante assoluta, e  $u_B$  o la media di  $u$  su  $B(x, r)$   $\frac{1}{|B|} \int_B u dx$  o la media pesata  $\frac{1}{\omega(B)} \int_B u \omega dx$ .

A questo punto una tecnica introdotta da D. Jerison permette di utilizzare unicamente la struttura di spazio di tipo omogeneo di  $(R^2, d, \omega(x) dx)$  per riportare la (2.18) a una disuguaglianza "sulla stessa sfera", sostituendo  $c_{15}$  con 1 e modificando eventualmente  $c_{16}$ .

Se ora  $u$  è una funzione lipschitziana su  $B = B(\bar{x}, r)$  tale che  
 $|E| = |\{y \in B ; u(y) = 0\}| \geq \beta |B(\bar{x}, r)|$ , si ha:

$$|u_B| = \frac{1}{|B|} \int_B u dx = \frac{1}{|E|} \int_E |u - u_B| dx \leq \frac{1}{\beta} \frac{1}{|B|} \int_B |u - u_B| dx \leq$$

$$(\text{poiché } w \in A_2) c_{17}(\beta) \left( \frac{1}{w(B)} \int_B |u - u_B|^{kp} \omega(x) dx \right)^{1/kp}.$$

Combinando queste stime con la disuguaglianza di Sobolev-Poincaré nella stessa sfera, si ottiene che:

(2.19) se  $u$  è lipschitziana su  $B = B(\bar{x}, r)$ ,  $r$  sufficientemente piccolo e

$$|\{y \in B ; u(y) \geq 0\}| \geq \beta |B|, \text{ allora}$$

$$\int_B |\omega|^{kp} (x) dx)^{1/kp} \leq c(\beta) r \left( \int_B |\nabla u|^p \omega(x) dx \right)^{1/p}.$$

A questo punto si possono ripetere i classici argomenti di J. Moser adattati alla geometria di  $(R^2, d, \omega(x) dx)$  come in [F/L2], [F/S] per provare il Teorema I. Il solo punto che resta da provare è l'esistenza di funzioni cut-off modulate sulle sfere  $B$  o sui parallelepipedi  $Q$ .

Siano ora  $0 < r_1 < r_2$  e sia  $\psi \in C^\infty$  su  $[0, +\infty[$ ,  $0 \leq \psi \leq 1$ ,  $\psi = 1$  su  $[0, r_1/r_2]$ ,  $\psi = 0$  su  $[1, +\infty[$ ,  $|\psi'(t)| \leq 2(1 - r_1/r_2)^{-1}$ . Consideriamo la funzione

$$\psi_{r_1, r_2}(y_1, y_2) = \psi\left(\frac{|y_1 - x_1|}{r_2}\right) \psi\left(\frac{|y_2 - x_2|}{F(x, r_2)}\right). \quad \psi_{r_1, r_2} \in C^\infty. \text{ Se } y \in Q(x, r_1)$$

$$\frac{|y_1 - x_1|}{r_2} \leq \frac{r_1}{r_2} \text{ e quindi il primo termine è } = 1; \text{ inoltre}$$

$$\frac{|y_2 - x_2|}{F(x, r_2)} \leq \frac{r_1 \Lambda(x, r_1)}{r_2 \Lambda(x, r_2)} \leq \frac{r_1}{r_2} \text{ poiché } \Lambda(x, r_1) \leq \Lambda(x, r_2),$$

e quindi anche il secondo termine è = 1, e quindi

$$\psi_{r_1, r_2}(y) = 1.$$

Se  $y \notin Q(x, r_2)$ , allora o  $|y_1 - x_1| \geq r_2$  o  $|y_2 - x_2| \geq F(x, r_2)$ ;

in ogni caso  $\psi_{r_1, r_2}(y) = 0$ .

Inoltre

$$|\partial_1 \psi_{r_1, r_2}(y)| \leq |\psi'(\frac{|y_1 - x_1|}{r_2})| \frac{1}{r_2} \leq \frac{2}{r_2} \frac{1}{1 - \frac{r_1}{r_2}} = \frac{2}{r_2 - r_1}$$

Infine

$$|\lambda(y) \partial_2 \psi_{r_1, r_2}(y)| = \psi'(\frac{|y_1 - x_1|}{r_1}) \lambda(y) |\psi'(\frac{|y_2 - x_2|}{F(x, r_2)})| \frac{1}{F(x, r_2)} = 1.$$

Ora, sarà  $I \neq 0$  se  $|y_1 - x_1| < r_2$  e  $\frac{r_1}{r_2} \leq \frac{|y_2 - x_2|}{F(x, r_2)} \leq 1$ ; in tal caso possiamo scrivere,

se  $r_2 \leq 1$

$$\begin{aligned} I &\leq \lambda(y) \frac{2}{1 - r_1/r_2} \frac{1}{F(x, r_2)} = 2 \frac{\lambda(y_1, x_1) + \lambda(y_1, y_2) - \lambda(y_1, x_2)}{(1 - r_1/r_2) F(x, r_2)} \leq \\ &\leq \frac{2Lr_2}{r_2 - r_1} + \frac{2\Lambda(x, r_2)}{(1 - r_1/r_2) F(x, r_2)} \leq \frac{2L}{r_2 - r_1} + \frac{2\Lambda(x, r_2)r_2}{r_2(1 - \frac{r_1}{r_2})F(x, r_2)} = (2L+2) \frac{1}{r_2 - r_1}. \end{aligned}$$

L'asserto è così provato.

BIBLIOGRAFIA

- [F/L1] B. FRANCHI, E. LANCONELLI, Hölder Regularity Theorem for a Class of Linear Nonuniformly Elliptic Operators with Measurable coefficients, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4), 10 (1983), 523-541.
- [F/L2] \_\_\_\_\_, An Embedding Theorem for Sobolev Spaces Related to non-Smooth Fields and Harnack Inequality, Comm. P.D.E., 9 (1984), 1237-1264.
- [F/K/S] E. FABES, C. KENIG, R. SERAPIONI, The Local Regularity of Solutions of Degenerate Elliptic Equations, Comm. P.D.E., 7 (1982), 77-116.
- [F/P] C. FEFFERMAN e D.H. PHONG, Subelliptic Eigenvalue Problems, Conference on Harmonic Analysis, Wadsworth, 1981, 590-606.
- [F/S] B. FRANCHI, R. SERAPIONI, Pointwise Estimates for a Class of Strongly Degenerate Elliptic Operators: a Geometrical Approach, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, in corso di stampa.
- [N/S/W] A. NAGEL, E.M. STEIN, S. WAINGER, Balls and Metrics Defined by Vector Fields, Acta Math. 155 (1985), 103-147.
- [X] C.J. XU, Opérateurs sons-elliptiques et régularité des solutions d'équations aux dérivées partielles du second ordre en deux variables, Comm. P.D.E.